

Title	温度勾配のある管内気柱の熱音響振動とその安定性(非線形波動の数理解と応用)
Author(s)	杉本, 信正; 吉田, 正福
Citation	数理解析研究所講究録 (2006), 1483: 112-121
Issue Date	2006-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/58096
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

温度勾配のある管内気柱の熱音響振動とその安定性

阪大院 基礎工 杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

吉田 正福 (Masatomi YOSHIDA)

Graduate School of Engineering Science,
Osaka University

1. はじめに

管の中の気柱に対し、管壁に適当な温度勾配を設けると気柱が自然に振動し始めることは古くから知られている [1]。これは静止した気柱の安定性の問題と捉えることができ、振動し始める臨界条件を求めることはまさに流体力学の問題である。しかしながら、この熱音響振動の安定性の解析はいまから約 30 年前にロット (Rott) によって行われたものが唯一であり、ベナール対流に比べなぜか関心を惹いてこなかったようである。だが、最近熱音響現象を利用した熱機関の開発が盛んに研究されるにつれ、その非線形現象解明への足掛かりとして、原点でもあるこの問題を改めて考えてみたい。本研究の背景については「ながれ」の最近の解説 [2] もご覧頂きたい。

熱音響振動の発生の本質は散逸効果である。普通の流れの安定性とは異なり、この場合基本流れは存在しない。また対流の場合とも違い重力の効果は本質的ではない。不安定化を引き起こす原因は、管壁に発生する境界層の温度勾配下での作用である。ニュートン流体でも境界層は履歴効果を発生させる。例えば、境界層外縁での壁面に対する法線方向の速度成分は、壁に平行な速度成分の非整数 $-1/2$ 階微分 [3] として知られている履歴積分で与えられる [4]。平行な速度成分が時間的に調和振動をしているとすると、法線成分はそれから位相が $-\pi/4$ 遅れて振動する。一方、圧力は平行速度成分に対し位相が $\pi/2$ 違うため、圧力と法線速度の積であるパワーの時間平均はゼロではない。この位相の違いから、境界層がその外部（一樣流れはないが主流部と呼ぶ）に平均的に仕事をする可能性がある。壁面に温度勾配が無ければ、主流部は境界層に対して仕事をし、境界層はパワーを散逸させパッシブに作用する。しかし、壁面に大きな温度勾配があると、境界層は主流部に対し仕事をし、アクティブに作用することがある。これが不安定化させる原因である。

本報告では、最も簡単な場合として、図 1 に示すような一端が開き、他端が閉じ平たい底をもつ断面の一樣な管の中の気柱を考える。そして管壁の温度 $T_e(x)$ (x は図 1 に示すように管に沿った座標) が閉端部に向かって上昇しているとする。この管は $1/4$ 波長管として知られているように、開口部に圧力の節、閉端部に腹をもつ最低次の固有振動モードをもつ。開口部から閉端部に向かって壁面温度を上昇させ、両端での温度比がある臨界値を越えると、気柱は自然に振動し始める。温度比が臨界値を越える

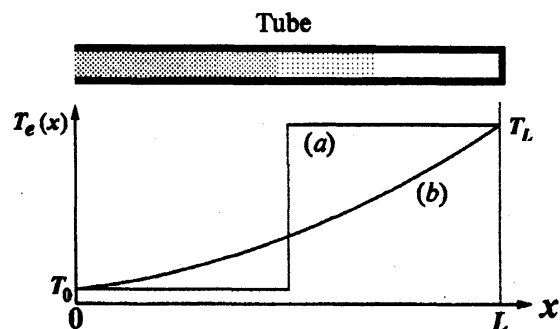


図 1: 一端が開き他端が閉じた $1/4$ 波長管と (a): ステップ型温度分布, (b): 放物型温度分布。

と振幅は大きくなり、開口部から音が放射される。放射により外にエネルギーが運び出される（放射減衰）とともに何らかの非線形効果によって振幅はある一定の値に落ち着き、定在振動が発生するものと考えられる。ヘリウムにおける熱音響振動はタコニス振動としてよく知られている [5]。温度勾配が緩やかであると管の断面にわたり温度が一様と見なすことができ、気体が静止している場合にはその温度は壁面温度に等しいと見なされる。こうした平衡状態に微小攪乱が入ったとしてその安定性を議論するには、軸方向に非一様な温度、密度分布をもつ圧力方程式の固有値問題を解かねばならない。これを一般の温度分布に対して解析的に求めることは難しく、そこでロットは温度がステップ関数状に変化する単純化した場合を取り扱った [6-9]。

このモデルでは、気柱はステップを境に高温、低温部に分けられる。各領域では温度勾配がないので境界層はパッシブに作用するだけであり、不安定化させるアクティブな箇所はステップの一点に限られる。そこでロットのモデルをまず検討し、境界層のアクティブな効果が広い領域で起こるような滑らかな温度分布に対して解析ができないものか考えてみる。ロットの理論では管の半径に対する境界層厚さの高次項まで進まないと臨界曲線が求まらないが、滑らかな分布を考えればその一次の近似の範囲内でもとまるのではないかと期待される。本報告では、熱音響振動が発生する臨界条件を求めるために、線形化した圧力方程式を用い、それを適当に変換することによって、境界層効果は複素軸座標に吸収できる一方、温度勾配の効果は局所音速を $a_e(x)$ とすると、 $\Omega_e(x) [= (a_e/T_e)dT_e/dx]$ なる組み合わせで現れることを示す。さらに $\Omega_e(x)$ が定数の場合には、温度分布が放物型になり、このとき固有値問題の解が陽に解け周波数方程式が導かれる。この方程式の実数解を調べることによって、管の両端の温度比と発生する振動数の間の臨界条件が求まることを示す。

2. ロットの理論の概要と問題点

熱伝導性を考えているにも拘わらず、ステップ分布を仮定することの解釈は難しい。ステップの仮定は方程式の解き易さ故であるが、注意したいのはステップ近傍の熱流は分からないし、また気柱を低温側、高温側に分けることになり、ステップでどのような接続条件を課するのが適切かという問題が新たに発生する。ロットは後者の問題を物理的というよりは、解くべき方程式が数学的に矛盾のないように解決した。この手続きにより、界面では圧力は連続ではあるが速度は不連続となり、両側の速度に各領域で決まる複素係数を掛けた量が連続となる条件を要求する。この条件は集中した熱源と等価であると解釈されている。

次に、境界層の厚さは管径に比べて特に薄いと仮定せず、主流部と境界層を分けない。境界層理論の立場からロットの取り扱いを見れば、境界層厚さの全ての高次項を含んでいるものと見なされる。ロットの理論の最大の仮定は、圧力が断面内で、しかも境界層をも含んで一様であるという点である。この仮定は、境界層の最低次の近似では成り立つが、高次近似でも成り立つかどうかは不明である。境界層外縁では u_0 が存在し、一方壁面では速度ゼロであることから、境界層の厚みにわたって小さいながらも半径方向速度が存在する。すると当然圧力勾配が現れると考えられ、高次でも常に断面にわたって圧力が一様と仮定するのは果たして成り立つのであろうか？ この仮定には当時多くの疑念がもたれたとロットは回想している [9]。

これを問題視するのは、臨界条件が管径に対する境界層厚さの比の全ての高次項を含んで求められているからである。1次近似の範囲では臨界温度比が 10^3 のオーダーになってしまい、実験結果に相当する臨界条件は得られない。そこで境界層厚さの最低でも2次項まで進まないと実験結果が説明できない。これは、ステップ関数の場合、境界層がエネルギーを増幅するのは唯一特異点一カ所だけであって、増幅効果が弱いからとも考えられる。

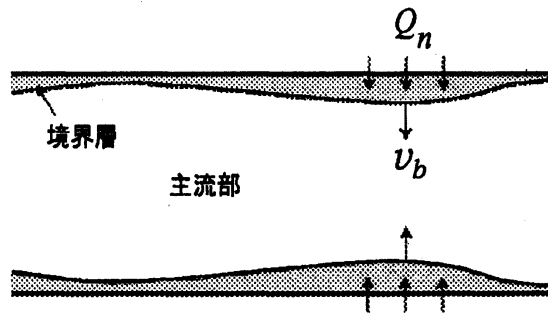


図2: 管の中の主流部と境界層の概念図。

境界層の厚さ比の全ての高次項を含めるとなると、他の無視した項との相対的な大きさの比較が必要になる。例えば、ラプラシアンの変化的変化は全く考慮していないが、それで十分なのだろうか。ロットの理論はこのような疑問点を含んでいるが、矢崎らのグループ[10]は実験でその結果をヘリウムに対して検証し、実験と理論がよい一致を示すことを明らかにした。この一致から理論の仮定が正当化されている。ロットの理論を非線形な場合に拡張しようとする、上で述べた箇所、特に不連続の取り扱いが問題になる。そこでステップ型分布に代わって何らかの滑らかな分布を課す代わりに、境界層の厚さの1次近似の範囲で臨界条件が求まらないものかと考えてみたくなる訳である。

3. 放物型温度分布に対する固有値問題

3.1. 圧力方程式と境界条件

図1で示される長さ L の管の中の気柱の安定性を考える。管壁は十分厚く、底の温度は $T_e(L)$ に等しく、底面にわたり一様とする。気柱の温度も各軸断面にわたって一様と仮定できるものとする。気柱の振動は普通、最低次の平面波モードで起こり、音響レイノルズ数は極めて大きい。このため粘性や熱伝導性による散逸効果は境界層内でのみ顕著に現れ、主流部では無視できる(図2参照)。したがって管の内部を主流部と境界層に分けて取り扱う。

平衡状態での密度、エントロピーをそれぞれ $\rho_e(x)$, $S_e(x)$ と添え字 e をつけて表し、一方圧力は至る所で一定値 p_0 をとるものとする。微小攪乱を考え、連続の式、ナビエ・ストークスの式およびエネルギー式を平衡状態の回りで線形化し、主流部の断面にわたって平均すると、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e u') = \frac{2}{R} \rho_e v_b, \quad (3.1)$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + u' \frac{dS_e}{dx} = 0 \quad (3.3)$$

となる。ただし、 ρ' , u' , p' , S' はそれぞれ、密度、主流部の x 方向の速度、圧力、エントロピーの平衡状態(添え字 e を付けた量(圧力は p_0))からの攪乱を表し、主流部の断面

にわたって平均されており, v_b は境界層外縁で内向き法線方向の速度である (図 2 参照).
ここで, 理想気体を仮定すると次の状態方程式が成り立つ:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho T}{\rho_e T_e}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^\gamma \exp \left(\frac{S - S_e}{c_v} \right). \quad (3.4)$$

ただし, $\gamma (= c_p/c_v)$ は比熱比で, c_p, c_v はそれぞれ定圧, 定積比熱である. これからエントロピーの勾配 dS_e/dx は $(c_p/T_e) dT_e/dx$ と (対数) 温度勾配で表現できる. 状態方程式 (3.4) を線形化すると, 攪乱に対し

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_e} + \frac{T'}{T_e}, \quad \frac{p'}{p_0} = \frac{\gamma \rho'}{\rho_e} + \frac{S'}{c_v} \quad (3.5)$$

となる.

境界層の解析はここでは省略し, 必要な結果のみ記すことにする. 詳しくは文献 [2,4] を参照されたい. 境界層近似から圧力はその厚みにわたっては変化しない. 線形近似を行うと, v_b の値が主流部の u' を用いて以下のように求まる:

$$v_b = C \sqrt{\nu_e} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) + C_T \frac{\sqrt{\nu_e} dT_e}{T_e dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u'}{\partial t^{-\frac{1}{2}}}. \quad (3.6)$$

ここで, C, C_T は, Pr をプラントル数とすると次の定数で与えられ,

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}, \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{Pr} + Pr} \quad (3.7)$$

$\nu_e(x) (= \mu/\rho_e)$ は動粘性率で, せん断粘性率の温度依存性は無視している. そして非整数 $-1/2$ 階微分は次式で定義される [3]:

$$\frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{u(x, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (3.8)$$

式 (3.6) を (3.1) に用い, また u' を (3.2) によって消去すると, p' に対する次の波動方程式を得る:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left[C \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{(C + C_T) dT_e}{T_e dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.9)$$

ここで, 局所音速 $a_e(x)$ は $\sqrt{\gamma p_0/\rho_e}$ で与えられる. 調和振動を考え $p' = P(x)e^{i\omega t}$ を代入すると,

$$(1 - 2C\delta_e)a_e^2 \frac{d^2 P}{dx^2} + [1 - 2(C + C_T)\delta_e] \frac{a_e^2 dT_e}{T_e dx} \frac{dP}{dx} + \omega^2 P = 0 \quad (3.10)$$

となる. ここで, P は複素圧力振幅, δ_e は

$$\delta_e(x) = \frac{(1 - i)}{R} \sqrt{\frac{\nu_e}{2\omega}} = \frac{1}{R} \left(\frac{\nu_e}{i\omega} \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

である ($|\delta_e| \ll 1$). 式 (3.10) は, ロットが導出した式において, 管半径に対する境界層の厚さの比の 1 次項だけを残せば同じ式になる [6].

境界条件は、開口部からの音の放射を無視し $x = 0$ で $P = 0$ 、閉端部（底面） $x = L$ では流速ゼロ、すなわち圧力勾配ゼロ $dP/dx = 0$ である。しかし、底面では気体の温度と壁面温度は異なるため、温度境界層が現れる。詳細は省くが、これにより境界条件は次のように修正される [11] :

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{(\gamma-1)\sqrt{\nu_e}}{\sqrt{Pr}} \frac{(i\omega)^{3/2} P}{a_e^2} \quad (3.12)$$

3.2. 周波数方程式

方程式 (3.10) を滑らかな温度分布に対して解くために、 P に代わって $F = ZP$ (ただし、 $Z = (1 - K\delta_e)a_e/a_0$ で K は後で決める定数で、 $a_0 = a_e(0)$) とおいて、(3.10) を以下のように書き直す :

$$X \frac{d}{dx} \left(X \frac{dF}{dx} \right) + MX \frac{d}{dx} \left(\frac{a_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} F \right) + YF = 0. \quad (3.13)$$

未定の X, Y, K, M は、この方程式と (3.10) が δ_e の一次の範囲で等価になるように決定する。第1節で導入した Ω_e を用いると、 $X = (1 - C\delta_e)a_e$ 、 $Y = \omega^2 + C_T\delta_e(a_e d\Omega_e/dx + \Omega_e^2)$ 、 $K = 2C_T - C$ 、 $M = -1/2$ と決定される。圧力方程式 (3.10) における境界層の効果は全て複素座標に吸収することができ、一方温度勾配と局所音速の温度依存性は Ω_e に組み込めることが分かった。この Ω_e は温度勾配の代表長さを音が伝わる時間の逆数に相当し、温度勾配に代わる重要なパラメータになる。また、 K はロットによって名付けられたクラマースの定数に等しいことが分かる。

簡単のため Ω_e が一定値 $2a_0\lambda/L$ (λ : 正の定数) をとるとすると、温度分布は放物型になる :

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(1 + \lambda \frac{x}{L} \right)^2. \quad (3.14)$$

現実には、管の表面からの熱伝達を考慮すると、温度分布は指数型になり、放物型分布はこれを近似したものとも考えられる。いま x に代わって複素座標 ξ を $X d/dx = a_0 d/d\xi$ によって導入すると、 Y の $C_T\delta_e\Omega_e^2$ の項を除き、係数が定数の ξ に関する微分方程式になり、解は容易に求まる。定数係数でない $C_T\delta_e\Omega_e^2$ を含んだ解は、逐次近似で δ_e の一次の範囲で実際次のように求めることができる :

$$F = B^+ e^{ik^+\xi} + B^- e^{ik^-\xi} + i \frac{2C_T \lambda b}{C} \frac{1}{L} \left(\frac{B^+}{k^+} e^{ik^+\xi} + \frac{B^-}{k^-} e^{ik^-\xi} \right) e^{\frac{\lambda}{2}\xi} \quad (3.15)$$

と求まる。ただし、 B^\pm は未定定数であり、 $b = C\delta_e(0)$ である。また σ は無次元周波数 $\omega L/a_0$ を表し、 $\psi = (\sigma^2 - \lambda^2/4)^{1/2}$ とおくと、 $k^\pm L = -i\lambda/2 \pm \psi$ (複号同順) である。

境界条件を課すために、 ξ と x の関係を求めると

$$\xi = \int_0^x \frac{a_0}{(1 - C\delta_e)a_e} dx = \frac{L}{\lambda} [\log \zeta + b(\zeta - 1)] + O(b^2) \quad (3.16)$$

となる。ここで、 $\zeta = 1 + \lambda x/L$ である。この関係において $x = L$ とおくと、 ξ 座標における閉端の座標 $\xi = \xi_L$ が得られる。ここでの境界条件 (3.12) を $dF/d\xi$ に対する条件に書き換えると

$$\frac{dF}{d\xi} = \left\{ \frac{\lambda}{L} \left[1 - \frac{2C_T}{C} (1 + \lambda)b \right] + \left(1 - \frac{1}{C} \right) \frac{R\sigma^2}{L^2} b \right\} F + O(b^2) \quad (3.17)$$

となる。これと開口部 $\xi = 0$ での境界条件 $F = 0$ を用いると、 B^\pm が自明でない解をもつ条件から、周波数方程式は以下のように求まる：

$$i\psi \left(\frac{e^{ik^+\xi_L} + e^{ik^-\xi_L}}{e^{ik^+\xi_L} - e^{ik^-\xi_L}} \right) = W \quad \text{ただし} \quad W = \frac{\lambda}{2} - \frac{2C_T}{C} \lambda b + \left(1 - \frac{1}{C} \right) \frac{R}{L} \sigma^2 b. \quad (3.18)$$

いま $b \rightarrow 0$ とおいて境界層効果を見無視すると、温度勾配のある場合の $1/4$ 波長管の周波数方程式を得る。右辺の最後の項は底面の境界層からの寄与を表し、管が十分長ければ無視できる。

4. 臨界条件

方程式 (3.18) の解 σ は一般に複素数であるが、実数解があればそれが臨界条件を与える。そこで式を $e^{\lambda\xi_L/L}$ について解き、(3.16) からの ξ_L と等しく置くと

$$\log(1 + \lambda) + \lambda b = -i \frac{\lambda}{2\psi} \log \left(\frac{W + i\psi}{W - i\psi} \right) \quad (4.1)$$

を得る。

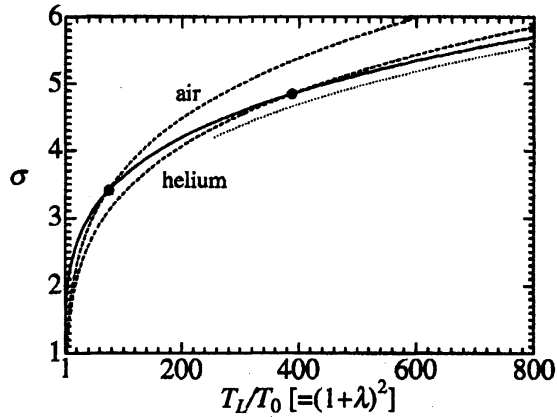


図 3: 実線は実部から得られる中立振動曲線を表し、破線は虚部から得られる関係。

4.1. 散逸を見無視した場合と散逸ゼロの極限の場合

いま b が十分小さいとして、 b についてその一次項まで展開すると

$$\begin{aligned} \log(1 + \lambda) + \lambda b = & -i \frac{\lambda}{2\psi} \left[\log \left(\frac{1 + 2i\psi/\lambda}{1 - 2i\psi/\lambda} \right) \pm 2in\pi \right] \\ & + \frac{\lambda}{\lambda^2/4 + \psi^2} \left[\frac{2C_T}{C} \lambda - \left(1 - \frac{1}{C} \right) \frac{R}{L} \sigma^2 \right] b + O(b^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。ここで、 n はゼロ以上の整数である。

まず境界層を全く無視した散逸のない場合 ($b = 0$) を場合を考える。最初に ψ が実数の場合、 $\log[(1 + 2i\psi/\lambda)/(1 - 2i\psi/\lambda)] = 2i \tan^{-1}(2\psi/\lambda)$ を用いると、 b を含まない項から

$$\cot \left[\frac{\psi}{\lambda} \log(1 + \lambda) \pm n\pi \right] = \frac{\lambda}{2\psi} \quad (4.3)$$

が得られ、一方 ψ が虚数の場合には、 $\psi = i\phi$ とおくと

$$1 + \lambda = \left(\frac{1 + 2\phi/\lambda}{1 - 2\phi/\lambda} \right)^{\lambda/2\phi} \quad (4.4)$$

が得られる。

両者が切り替わる λ の値は $e^2 - 1$ である。関係(4.3), (4.4)は、散逸を無視した場合に、温度勾配 λ を与えたときに発生する中立振動の無次元角振動数 σ を与える。正の λ の値に対して常に σ が存在し、 C, C_T の値には依らないことに注意する。図3の実線は σ と両端の温度比 $T_L/T_0 [= (1 + \lambda)^2]$ の関係を表す。中立振動曲線は $\lambda \rightarrow 0$ で $\sigma \rightarrow \pi/2$ となる一方、 $\lambda \rightarrow \infty$ では点線で示す $\sigma^2 = \lambda + 2 \log \lambda - 3 + o(1)$ に漸近する。

次に $b \rightarrow 0$ の極限の場合を考える。このとき(4.2)の虚数部は b の係数から起こるので、それをゼロと置くと、 $b \propto 1 - i$ であるので実部もゼロとなり、実質(4.2)の b^0, b^1 の係数をそれぞれゼロに置いた結果と等しい。これから、 ψ が実数の場合には

$$\lambda^2/4 + \psi^2 = \sigma^2 = c\lambda \quad \text{ただし} \quad c = \frac{2C_T}{C + (C - 1)R/L}. \quad (4.5)$$

虚数の場合には

$$\lambda^2/4 - \phi^2 = \sigma^2 = c\lambda \quad (4.6)$$

となる。

これらの関係は c を通して気体の種類および管の縦横比 R/L に依存する。図3の破線は、それぞれ空気($C = 1.47, C_T = 1.14$)とヘリウム($C = 1.82, C_T = 1.17$)の場合の(4.5), (4.6)を表す。ここで、 $R/L = 0.05$ と選んだ。散逸を無視すると実線上の中立振動が許されるが、少しでも散逸効果を考慮すると、散逸ゼロの極限($b \rightarrow 0$)において実線と破線との交点で与えられる温度比と周波数が選ばれることになり、厳密に言うところの点以外の中立曲線上の振動は起こらない。しかし、後に示すように散逸がほどほど小さい場合には、周波数は中立曲線の近くにあることが分かるので、中立振動曲線は全く意味がない訳ではない。

4.2. 臨界曲線

次に、周波数方程式(4.1)において $|b|$ が1より小さいとするが、 b で展開することなくそのまま数値的に解を求める。いま

$$b = (1 - i)\zeta \quad \text{ただし} \quad \zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{\sigma}} \quad \text{および} \quad \zeta_0 = \frac{C}{R} \sqrt{\frac{\nu_0 L}{2a_0}} \quad (4.7)$$

とおき、

$$W = \frac{1}{2}\lambda[1 - (\alpha + i\beta)] \quad (4.8)$$

ただし

$$\alpha = -\beta = \left[\frac{4C_T}{C} - 2 \left(1 - \frac{1}{C} \right) \frac{R\sigma^2}{L\lambda} \right] \zeta \quad (4.9)$$

とおくと、次の関係を得る：

$$\log \left(\frac{W + i\psi}{W - i\psi} \right) = \log \left[\frac{1 - \alpha - i(\beta - 2\psi/\lambda)}{1 - \alpha - i(\beta + 2\psi/\lambda)} \right]. \quad (4.10)$$

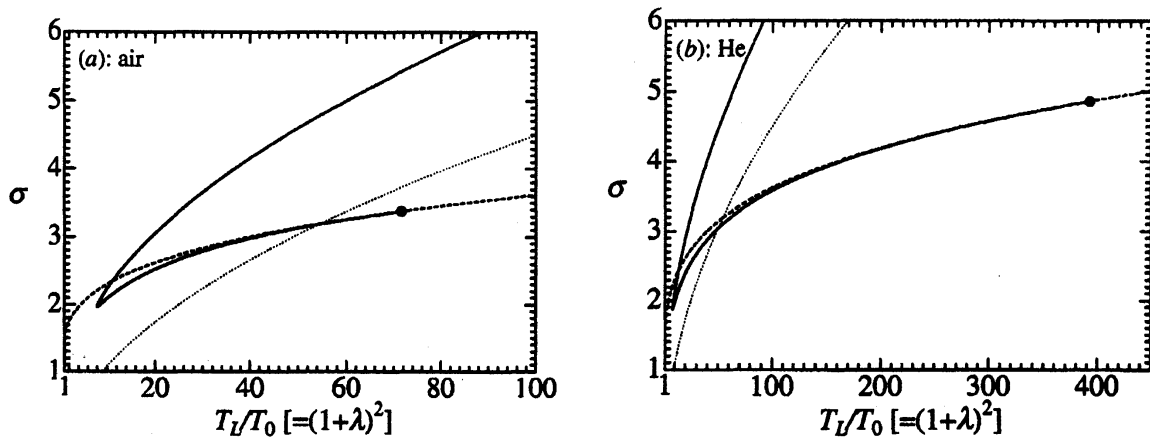


図4: 実線は温度比 $T_L/T_0 [= (1+\lambda)^2]$ に対する臨界角振動数 σ を表し、破線は中立振動曲線、点線は $\psi = 0$ になる曲線 $\sigma = \lambda/2$ を表し、(a) は空気の場合、(b) はヘリウムの場合である。黒丸は散逸効果がゼロ ($\zeta_0 \rightarrow 0$) の極限の解である。

もし ψ が実数であると、(4.1) は次のように実部と虚部に分けることができる：

$$\begin{aligned} & \log(1+\lambda) + \lambda\zeta \\ & -\frac{\lambda}{2\psi} \left[-\tan^{-1} \left(\frac{\beta - 2\psi/\lambda}{1-\alpha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\beta + 2\psi/\lambda}{1-\alpha} \right) \pm 2n\pi \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

および

$$-\lambda\zeta + \frac{\lambda}{4\psi} \log \left[\frac{(1-\alpha)^2 + (\beta - 2\psi/\lambda)^2}{(1-\alpha)^2 + (\beta + 2\psi/\lambda)^2} \right] = 0. \quad (4.12)$$

一方、 ψ が純虚数である場合には、実部、虚部は以下のように与えられる：

$$\log(1+\lambda) + \lambda\zeta + \frac{\lambda}{4\phi} \log \left[\frac{(1-\alpha - 2\phi/\lambda)^2 + \beta^2}{(1-\alpha + 2\phi/\lambda)^2 + \beta^2} \right] = 0 \quad (4.13)$$

および

$$-\lambda\zeta + \frac{\lambda}{2\phi} \left[-\tan^{-1} \left(\frac{\beta}{1-\alpha - 2\phi/\lambda} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{1-\alpha + 2\phi/\lambda} \right) \pm 2n\pi \right] = 0. \quad (4.14)$$

この二組の方程式の解を散逸ゼロの極限の解の回りに、 ζ_0 の値を少しずつ大きく取りながらニュートン法で求める。図4に、空気、ヘリウムに対する解を実線で示す。 ζ_0 の値をゼロから大きくしていくと、温度比、角振動数とも黒丸から破線で示す中立振動の曲線にほぼ沿って低下する。温度比の最小値は、空気では $T_L/T_0 \approx 7.897$ ($\zeta_0 \approx 0.47$)、ヘリウムでは $T_L/T_0 \approx 8.213$ ($\zeta_0 \approx 0.54$) でおこり、その後 ζ_0 を大きくすると別の枝が現れ右上方に発散する。なお、 n の値は最初はゼロから始め、次第に 1, 2, ... と変化させる。この図には ζ_0 の値は表に現れておらず、そこで図5には、ロットにならって横軸には境界層厚さに対する管径の比 $R/\sqrt{\nu_0/\omega}$ ($= R/\sqrt{\nu_0 L/a_0 \sigma}$) をとり、縦軸は両端での温度比 $T_e(L)/T_e(0) [= (1+\lambda)^2]$ をとった曲線を示す。

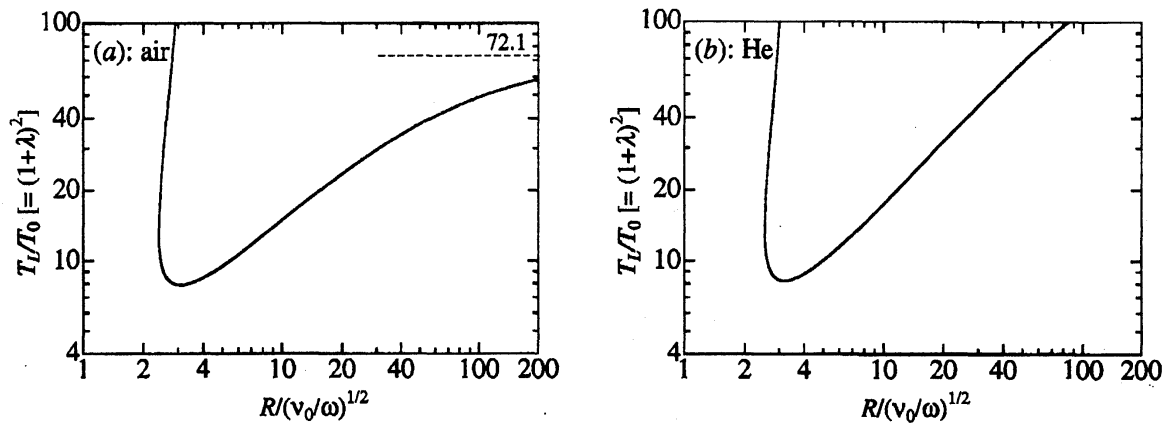


図5: 横軸に開口端での境界層の厚さに対する管の半径 $R/\sqrt{\nu_0/\omega}$ ($= R/\sqrt{\nu_0 L/a_0 \sigma}$), 縦軸に温度比 $T_L/T_0 = (1 + \lambda)^2$ をとった臨界曲線を表す, (a) は空気の場合, (b) はヘリウムの場合である.

これが気柱振動が発生する臨界曲線であり, 右の枝は中立振動に近い振動に相当する一方, 左の枝は粘性が本質的な枝である. 二つの枝が存在することから, 温度比が約8以上であれば, 二つの振動数が存在することになる. しかし右の枝は, 横軸の座標が大きくなると散逸ゼロの極限に近づくため, 図4の黒丸で示した温度比に漸近する. この温度比は空気では約72.1, ヘリウムでは392である. この温度比より大きい場合には左の枝は無限遠方に発散するので, 振動数は常に一つは存在する. この曲線の上部では σ の虚数部が負になり, 不安定領域である. 図6にヘリウムの場合の不安定領域における σ の虚部 σ_i を, 横軸に $R/(\nu_0/\omega_r)$ (ω_r は ω の実数部) をとり幾つかの温度比に対し表す.

図5の臨界曲線とステップ型分布の臨界曲線とを比較すると [7,10], 定性的には似ているが, 振動が起きる最小温度比は僅かであるが放物型分布では高くなる. 最小温度比に近づくと, 境界層の厚さがかなり厚くなり, さらに左の枝では境界層が管の断面を埋め尽くす結果を与え, 境界層が薄い仮定が満たされていないことが分かる. しかしながら, 右の枝では温度比が大きくなるに従って仮定は満たされるようになる.

5. おわりに

一端が開口し, 一様な断面をもつ管の中で生じる熱音響振動に対して, 管壁温度が放物型分布をするときには, 境界層厚さの一次の近似の範囲で臨界曲線を解析的に求めることができることを示した. ステップ型温度分布では, ステップの解釈やそこでの接続条件の物理的意味など難しい問題を含むのに対し, 放物型分布ではそうした問題は全くなく, 両端での境界条件のみで全てが決まる利点がある. また, 境界層のアクティブな作用が空間

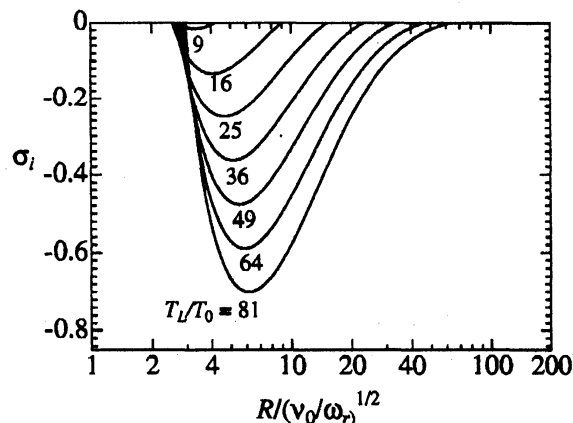


図6: ヘリウムに対する不安定領域における角振動数の虚数部 σ_i . 横軸は境界層厚さに対する管の半径 $R/(\nu_0/\omega_r)$ である.

的に広がった領域で発生するため、境界層厚さの一次近似の範囲で臨界曲線が求まる。その形はヘリウムに対して実験で得られた臨界曲線に定性的に似ている。普通タコニス振動が発生する場合には、温度分布はステップ型分布ではなく、むしろ放物型分布に近いかもしれない。おそらく、温度が開口端から閉端部に向かって単調に増加する場合には、臨界曲線はもちろん定量的にはそれぞれ異なるが、定性的には概ねここで求めたものに近いのではないかと想像される。なお、空気の場合でも振動は予想されるが、ただ、温度比を最小でも8倍以上確保することは現実には難しい。

いまや放物型の解が求まることが分かったので、管の中の圧力、流速、温度分布や、特にステップ型分布では求めることのできない壁面からの熱流等が何ら問題無く求まる。これから開口端近くの境界層が主流部に対しアクティブに作用し、閉端部近くの境界層がパッシブに作用することが分かる[9]。臨界状態では、管全体に入るパワーの総和はゼロ（正確には b^2 の程度）であり、無限小の振幅で振動するこの状態を熱機関として見ればアイドリングに相当する。今後の課題として、臨界曲線より僅かに温度比が高い場合における非線形挙動の解析については、計算の面倒さはあるもののステップ型の場合と違い本質的な問題はないと思われる。

参考文献

- [1] RAYLEIGH, LORD 1945 *The theory of sound Vol.2*. Dover publications, 230-231.
- [2] 杉本信正 2005 境界層理論から見た熱音響振動とその安定性解析. 日本流体力学会誌「ながれ」 24, 381-393.
- [3] 杉本信正 1985 非整数階微分・積分とその応用. 日本流体力学会誌「ながれ」 4, 110-120.
- [4] SUGIMOTO, N. & TSUJIMOTO, K. 2002 Amplification of energy flux of nonlinear acoustic waves in a gas-filled tube under an axial temperature gradient. *J. Fluid Mech.* 456, 377-409.
- [5] TACONIS, K. W., BEENAKKER, J. J. M., NIER, A. O. C. & ALDRICH, L. T. 1949 Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below 2.19°K. *Physica*. 15, 733-739.
- [6] ROTT, N. 1969 Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Z. Angew. Math. Phys.* 20, 230-243.
- [7] ROTT, N. 1973 Thermally driven acoustic oscillations. Part II: stability limit for helium. *Z. Angew. Math. Phys.* 24, 54-72.
- [8] ROTT, N. 1980 Thermoacoustics. *Adv. Appl. Mech.* 20, 135-175.
- [9] ROTT, N. 2001 Linear thermoacoustics. *Proc. 1st. Intl. Workshop on Thermoacoustics*. Technische Universiteit Eindhoven and the Acoustical Society of America, 1-63.
- [10] YAZAKI, T., TOMINAGA, A. & NARAHARA, Y. 1980 Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous helium. *J. Low Temp. Phys.* 41, 45-60.
- [11] SUGIMOTO, N. & YOSHIDA, M. Marginal instability for thermoacoustic oscillations of gas in a tube. *J. Fluid Mech.* 投稿中.